Independencia lineal

En esta sección daremos un teorema que nos permite determinar cuando un sistema $m \times n$ tiene solución.

Independencia lineal

En esta sección daremos un teorema que nos permite determinar cuando un sistema $m \times n$ tiene solución.

Para ello vamos a considerar las filas de las matrices como **vectores filas** y las columnas como **vectores columnas**.

Independencia lineal

En esta sección daremos un teorema que nos permite determinar cuando un sistema $m \times n$ tiene solución.

Para ello vamos a considerar las filas de las matrices como **vectores filas** y las columnas como **vectores columnas**.

En adelante notaremos un vector de n componentes como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Independencia lineal

En esta sección daremos un teorema que nos permite determinar cuando un sistema $m \times n$ tiene solución.

Para ello vamos a considerar las filas de las matrices como **vectores filas** y las columnas como **vectores columnas**.

En adelante notaremos un vector de n componentes como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Un vector $\mathbf{z}$ se puede escribir como **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^n$ si existen números reales $c_1, c_2, ..., c_n$ tal que

$$\mathbf{z} = c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + c_n\mathbf{x}^n$$

Independencia lineal

En esta sección daremos un teorema que nos permite determinar cuando un sistema $m \times n$ tiene solución.

Para ello vamos a considerar las filas de las matrices como **vectores filas** y las columnas como **vectores columnas**.

En adelante notaremos un vector de n componentes como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Un vector $\mathbf{z}$ se puede escribir como **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^n$ si existen números reales $c_1, c_2, ..., c_n$ tal que

$$\mathbf{z} = c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + c_n\mathbf{x}^n$$

Ejemplo: El vector $\mathbf{z} = (3, 4, 2)$ se puede escribir como conbinación lineal de $\mathbf{x}^1 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{x}^2 = (1, 1, 0)$ ya que

$$\mathbf{z} =$$

Independencia lineal

En esta sección daremos un teorema que nos permite determinar cuando un sistema $m \times n$ tiene solución.

Para ello vamos a considerar las filas de las matrices como **vectores filas** y las columnas como **vectores columnas**.

En adelante notaremos un vector de n componentes como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Un vector $\mathbf{z}$ se puede escribir como **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^n$ si existen números reales $c_1, c_2, ..., c_n$ tal que

$$\mathbf{z} = c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + c_n\mathbf{x}^n$$

Ejemplo: El vector $\mathbf{z} = (3, 4, 2)$ se puede escribir como conbinación lineal de $\mathbf{x}^1 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{x}^2 = (1, 1, 0)$ ya que

$$\mathbf{z} = \quad (3, 4, 2) =$$

Independencia lineal

En esta sección daremos un teorema que nos permite determinar cuando un sistema $m \times n$ tiene solución.

Para ello vamos a considerar las filas de las matrices como **vectores filas** y las columnas como **vectores columnas**.

En adelante notaremos un vector de n componentes como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Un vector $\mathbf{z}$ se puede escribir como **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^n$ si existen números reales $c_1, c_2, ..., c_n$ tal que

$$\mathbf{z} = c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + c_n\mathbf{x}^n$$

Ejemplo: El vector $\mathbf{z} = (3, 4, 2)$ se puede escribir como conbinación lineal de $\mathbf{x}^1 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{x}^2 = (1, 1, 0)$ ya que

$$\mathbf{z} = \quad (3, 4, 2) = \quad 1(0, 1, 1) + 3(1, 1, 0) =$$

Independencia lineal

En esta sección daremos un teorema que nos permite determinar cuando un sistema $m \times n$ tiene solución.

Para ello vamos a considerar las filas de las matrices como **vectores filas** y las columnas como **vectores columnas**.

En adelante notaremos un vector de n componentes como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Un vector $\mathbf{z}$ se puede escribir como **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^n$ si existen números reales $c_1, c_2, ..., c_n$ tal que

$$\mathbf{z} = c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 + c_n\mathbf{x}^n$$

Ejemplo: El vector $\mathbf{z} = (3, 4, 2)$ se puede escribir como conbinación lineal de $\mathbf{x}^1 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{x}^2 = (1, 1, 0)$ ya que

$$\mathbf{z} = \quad (3, 4, 2) = \quad 1(0, 1, 1) + 3(1, 1, 0) = \quad 1\mathbf{x}^1 + 3\mathbf{x}^2$$

Independencia lineal

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^n\}$ es **linealmente dependiente** si uno de los vectores se pueden escribir como una conbinación lineal de los otros restantes.

Independencia lineal

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^n\}$ es **linealmente dependiente** si uno de los vectores se pueden escribir como una conbinación lineal de los otros restantes.

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^n\}$ es **linealmente independiente** si no es linealmente dependiente.

Independencia lineal

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^n\}$ es **linealmente dependiente** si uno de los vectores se pueden escribir como una conbinación lineal de los otros restantes.

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^n\}$ es **linealmente independiente** si no es linealmente dependiente.

Ejemplo: El conjunto de vectores $\{(3, 4, 2), (0, 1, 2), (1, 1, 0)\}$ es linealmente dependiente ya que como vimos el ejemplo anterior

$$(3, 4, 2) = \quad 1(0, 1, 1) + 3(1, 1, 0)$$

Independencia lineal

Lo que hemos dicho de vectores de la forma $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ (vectores filas). También lo podemos decir de los vectores columnas de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Independencia lineal

Independencia lineal

Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Independencia lineal

Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Tiene m vectores filas de n componentes

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Independencia lineal

Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Tiene m vectores filas de n componentes

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$, ..., $\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

y n vectores columnas de m componentes

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Las filas son L.I. pues no existe c tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Independencia lineal

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Las filas son L.I. pues no existe c tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

En cambio las columnas son L.D. ya que
$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Independencia lineal

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Las filas son L.I. pues no existe c tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

En cambio las columnas son L.D. ya que
$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Sin embargo las columna $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ son L.I. Observemos que A tiene (como máximo) dos columnas L.I.

Independencia lineal

Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 3 \\ 1 & -17 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Independencia lineal

Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 3 \\ 1 & -17 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Las columnas son L.I. ya que no existe c tal que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -17 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Independencia lineal

Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 3 \\ 1 & -17 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Las columnas son L.I. ya que no existe c tal que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -17 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En cambio las filas son L.D. ya que,

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 3 \\ 1 & -17 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Las columnas son L.I. ya que no existe c tal que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -17 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En cambio las filas son L.D. ya que,

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Sin embargo las filas $\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}$ son L.I. B tiene (como máximo) dos filas L.I.

Independencia lineal

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Las filas don L.D. ya que,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Independencia lineal

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Las filas don L.D. ya que,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo las filas $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ son L.I. Observemos que C tiene (como máximo) dos filas L.I.

Independencia lineal

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Las filas don L.D. ya que,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo las filas $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ son L.I. Observemos que C tiene (como máximo) dos filas L.I.

Las columnas son L.D. ya que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

Independencia lineal

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Las filas don L.D. ya que,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo las filas $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ son L.I. Observemos que C tiene (como máximo) dos filas L.I.

Las columnas son L.D. ya que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

Sin embargo las columnas $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ son L.I. Observemos que C tiene (como máximo) dos columnas L.I.

$$D = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Las filas y las columnas son L.I.

Independencia lineal y Rango

Lema: En una matriz el número (máximo) de filas linealmente independientes, coincide con el número (máximo) de columnas linealmente independientes.

Independencia lineal y Rango

Lema: En una matriz el número (máximo) de filas linealmente independientes, coincide con el número (máximo) de columnas linealmente independientes.

Se llama **rango** de una matriz al número (máximo) de filas (o columnas) L.I.

Lema: En una matriz el número (máximo) de filas linealmente independientes, coincide con el número (máximo) de columnas linealmente independientes.

Se llama **rango** de una matriz al número (máximo) de filas (o columnas) L.I.

Denotamos por $ran\,(A)$ al rango de la matriz A.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ es fácil ver que $ran(A) = 2$.

Independencia lineal y Rango

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ es fácil ver que $ran(A) = 2$.

Se puede probar que las operaciones o transformaciones elementales de una matriz no cambian el rango de una matriz. Es decir, las operaciones que se usan en el método de Gauss no modifica el rango.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ es fácil ver que $ran(A) = 2$.

Se puede probar que las operaciones o transformaciones elementales de una matriz no cambian el rango de una matriz. Es decir, las operaciones que se usan en el método de Gauss no modifica el rango.

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, por medio de la operaciones elementales llegamos a la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Independencia lineal y Rango

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ es fácil ver que $ran(A) = 2$.

Se puede probar que las operaciones o transformaciones elementales de una matriz no cambian el rango de una matriz. Es decir, las operaciones que se usan en el método de Gauss no modifica el rango.

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, por medio de la operaciones elementales llegamos a la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es fácil ver que $ran(B) = 3$.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ es fácil ver que $ran(A) = 2$.

Se puede probar que las operaciones o transformaciones elementales de una matriz no cambian el rango de una matriz. Es decir, las operaciones que se usan en el método de Gauss no modifica el rango.

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, por medio de la operaciones elementales llegamos a la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es fácil ver que $ran(B) = 3$.
Luego $ran(A) = 3$.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ es fácil ver que $ran(A) = 2$.

Se puede probar que las operaciones o transformaciones elementales de una matriz no cambian el rango de una matriz. Es decir, las operaciones que se usan en el método de Gauss no modifica el rango.

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, por medio de la operaciones elementales llegamos a la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es fácil ver que $ran(B) = 3$.
Luego $ran(A) = 3$.

Ejemplo: Dada la matriz $A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ por medio de la operaciones elementales llegamos a la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo: Dada la matriz $A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ por medio de la operaciones elementales llegamos a la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Es fácil ver que $ran(B) = 2$. Luego $ran(A) = 2$.

Teorema de Rouché

Teorema [Rouché]: La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones con n variables

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \qquad (1)$$

tenga solución es que

$$\text{ran}\left(\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & \cdots & a1n \\ a12 & a22 & a23 & \cdots & a2n \\ a31 & a32 & a33 & \cdots & a3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ am1 & am2 & am3 & \cdots & amn \end{pmatrix}\right) = \text{ran}\left(\begin{array}{ccccc|c} a11 & a12 & a13 & \cdots & a1n & b1 \\ a12 & a22 & a23 & \cdots & a2n & b2 \\ a31 & a32 & a33 & \cdots & a3n & b3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ am1 & am2 & am3 & \cdots & amn & bm \end{array}\right)$$

Teorema de Rouché

Demostración. Podemos escribir el sistema (1), en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

Teorema de Rouché

Demostración. Podemos escribir el sistema (1), en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

Si el sistema (2) tiene solución, existen números

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

que al multiplicarlos por las columnas de la matriz A y sumarlos nos da la columna de los b,

Demostración. Podemos escribir el sistema (1), en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

Si el sistema (2) tiene solución, existen números

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

que al multiplicarlos por las columnas de la matriz A y sumarlos nos da la columna de los b,. Es decir que la columna de los términos independientes es combinación lineal de las anteriores.

Teorema de Rouché

Demostración. Podemos escribir el sistema (1), en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

Si el sistema (2) tiene solución, existen números

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

que al multiplicarlos por las columnas de la matriz A y sumarlos nos da la columna de los b,. Es decir que la columna de los términos independientes es combinación lineal de las anteriores.
Por esto cuando agregamos esta columna a la matriz A no se aumenta el rango (numero de columnas L.I.) así se tiene que $ran(A) = ran(A')$.

Teorema de Rouché

Demostración. Podemos escribir el sistema (1), en forma vectorial

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

Si el sistema (2) tiene solución, existen números

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

que al multiplicarlos por las columnas de la matriz A y sumarlos nos da la columna de los b,. Es decir que la columna de los términos independientes es combinación lineal de las anteriores.
Por esto cuando agregamos esta columna a la matriz A no se aumenta el rango (numero de columnas L.I.) así se tiene que $ran(A) = ran(A')$.
El recíproco es similar.

Teorema de Rouché

Ejemplo

Determinar por el teorema de Rouché si el sistema tienen solución:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \end{array} \right. .$$

Teorema de Rouché

Ejemplo

Determinar por el teorema de Rouché si el sistema tienen solución:

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \end{array} \right. .$$

Tenemos que determinar el rango de la matriz de los coeficientes el de la matriz ampliada

$$A_{3x3} = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{array} \right) \qquad A'_{3x4} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Teorema de Rouché

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad A'_{3x4} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Podemos ver $ran\left(A_{3x3}\right) = 3$ (aplicando Gauss)

Teorema de Rouché

$$A_{3x3} = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{array} \right) \qquad A'_{3x4} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Podemos ver $ran\,(A_{3x3}) = 3$ (aplicando Gauss)
Además (aplicando el método de Gauss)

$$A'_{3x4} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow$$

Teorema de Rouché

$$A_{3x3} = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \qquad A'_{3x4} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Podemos ver $ran\left(A_{3x3}\right) = 3$ (aplicando Gauss)
Además (aplicando el método de Gauss)

$$A'_{3x4} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

Teorema de Rouché

$$A_{3x3} = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{array} \right) \qquad A'_{3x4} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Podemos ver $ran\left(A_{3x3}\right) = 3$ (aplicando Gauss)
Además (aplicando el método de Gauss)

$$A'_{3x4} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow$$

Teorema de Rouché

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad A'_{3x4} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Podemos ver $ran\left(A_{3x3}\right) = 3$ (aplicando Gauss)
Además (aplicando el método de Gauss)

$$A'_{3x4} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$A_{3x3} = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \qquad A'_{3x4} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Podemos ver $ran\left(A_{3x3}\right) = 3$ (aplicando Gauss)

Además (aplicando el método de Gauss)

$$A'_{3x4} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

Luego $ran\left(A'_{3x4}\right) = 3.$

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad A'_{3x4} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Podemos ver $ran\left(A_{3x3}\right) = 3$ (aplicando Gauss)

Además (aplicando el método de Gauss)

$$A'_{3x4} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Luego $ran\left(A'_{3x4}\right) = 3.$

Entonces $ran\left(A_{3x3}\right) = ran\left(A'_{3x4}\right)$

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad A'_{3x4} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Podemos ver $ran\left(A_{3x3}\right) = 3$ (aplicando Gauss)

Además (aplicando el método de Gauss)

$$A'_{3x4} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Luego $ran\left(A'_{3x4}\right) = 3.$

Entonces $ran\left(A_{3x3}\right) = ran\left(A'_{3x4}\right)$

Por el Teorema de Rouché el sistema es compatible.

Ejemplo: Considere el sistema

$$\begin{cases} -5\lambda - 10\mu = & -4 \\ \lambda + 2\mu = & 2 \\ -\lambda - 2\mu = & -5 \end{cases}$$

Teorema de Rouché

Ejemplo: Considere el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rr} -5\lambda - 10\mu = & -4 \\ \lambda + 2\mu = & 2 \\ -\lambda - 2\mu = & -5 \end{array} \right.$$

Tenemos que $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Por tanto el $ran(A) = 1$

Teorema de Rouché

Ejemplo: Considere el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rr} -5\lambda - 10\mu = & -4 \\ \lambda + 2\mu = & 2 \\ -\lambda - 2\mu = & -5 \end{array} \right.$$

Tenemos que $\left(\begin{array}{c} -10 \\ 2 \\ -2 \end{array} \right) = 2 \left(\begin{array}{c} -5 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right)$. Por tanto el $ran(A) = 1$

Ahora si consideramos la matriz ampliada $A' = \left(\begin{array}{cc|r} -10 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \end{array} \right)$.

Teorema de Rouché

Ejemplo: Considere el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rr} -5\lambda - 10\mu = & -4 \\ \lambda + 2\mu = & 2 \\ -\lambda - 2\mu = & -5 \end{array} \right.$$

Tenemos que $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Por tanto el $ran(A) = 1$

Ahora si consideramos la matriz ampliada $A' = \left(\begin{array}{cc|c} -10 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \end{array} \right)$.

Tenemos que $ran\left(A'\right) = 2$ (pues $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ son L.I.).

Ejemplo: Considere el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rr} -5\lambda - 10\mu = & -4 \\ \lambda + 2\mu = & 2 \\ -\lambda - 2\mu = & -5 \end{array} \right.$$

Tenemos que $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Por tanto el $ran(A) = 1$

Ahora si consideramos la matriz ampliada $A' = \left(\begin{array}{cc|c} -10 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \end{array} \right)$.

Tenemos que $ran\left(A^{'}\right) = 2$ (pues $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ son L.I.).

Por tanto el sistema es incompatible.