Unidad 3: Conjuntos

3.1 Introducción

Georg Cantor [1845-1918] formuló de manera individual la teoría de conjuntos a finales del siglo XIX y principios del XX. Su objetivo era el de formalizar las matemáticas como ya se había hecho con el cálculo cien años antes. Cantor comenzó esta tarea por medio del análisis de las bases de las matemáticas y explicó todo basándose en los conjuntos (por ejemplo, la definición de función se hace estrictamente por medio de conjuntos). Este monumental trabajo logró unificar a las matemáticas y permitió la comprensión de nuevos conceptos.

El propósito de este Capítulo es el estudio de la teoría intuitiva de conjuntos. En este sentido, los términos *conjunto*, *elemento* y *pertenencia* son considerados como términos primitivos, es decir, no se definen. Sobre esta base se definen la inclusión y la igualdad, y se estudian sus propiedades. El mismo tratamiento se hace con las operaciones entre conjuntos. Luego desarrollamos ejemplos en los que se pretende mostrar un método adecuado de trabajo para demostrar distintas propiedades de conjuntos.

3.2 Notaciones y Definiciones

Afin de desarrollar ideas intuitivas consideramos un conjunto como una colección de objetos, con una determinada cualidad, los cuales pueden ser conjuntos. Utilizaremos, generalmente, letras mayúsculas para referirnos a los conjuntos y para especificar elementos se usarán letras minúsculas, a menos que dichos elementos sean, a su vez, conjuntos.

Ejemplo 1 *Sea H el conjunto de "todos los seres humanos", y sea d la persona "Diego Reyes". Es claro que d es un miembro o elemento del conjunto H. En general decimos "el elemento d pertenece al conjunto H" y lo simbolizamos:*

$$d \in H.$$

El anterior ejemplo involucraba un ***conjunto*** "H" y un ***objeto*** "d". La proposición, "$d \in H$" se lee: *d pertenece a H* o bien *el elemento d pertenece al conjunto H*.

Su negación es: *d no pertenece a H*, la cual se simboliza:

$$d \notin H.$$

En general, un conjunto A se define seleccionando los elementos de un cierto conjunto $\mathcal{U}$ de referencia que cumplen una determinada propiedad.

Ejemplo 2 *El conjunto A de los números enteros menores que 2, está formado por los elementos del conjunto referencial $\mathbb{Z}$ (números enteros) que satisfacen la propiedad de ser menores que 2.*

El conjunto referencial o universal depende de la disciplina en estudio; se fija de antemano, y está formado por todos los elementos que intervienen en el tema de interés. En general se denotará con $\mathcal{U}$. Además podemos dar los conjuntos por extensión o por comprención, es decir,

Definición 1 *Un conjunto se define por* **extensión** *cuando se enumeran todos los elementos que lo constituyen. Un conjunto se define por* **comprensión** *cuando se indica el conjunto referencial o universal y la* ***propiedad*** *que caracteriza a sus elementos.*

Ejemplo 3 *Dar por extención y por comprención el conjunto A, de las vocales.*
Al definir un conjunto A por extensión, debemos enumerar todos sus elementos. Es decir, $A = \{a, e, i, o, u\}$ y cuando se define por comprensión se dar el conjunto referencial o universal y la ***propiedad*** *que caracteriza a sus elementos, en este caso $A = \{x \in \mathcal{U} \ / \ x \text{ es una vocal}\}$, donde $\mathcal{U}$ es el alfabeto.*

Observación: El conjunto A de los elementos de $\mathcal{U}$ que verifican la propiedad P se define por comprensión

$$A = \{x \in \mathcal{U} \,/\, P(x)\} = \{x \in \mathcal{U} \,:\, P(x)\}$$

o más brevemente (si $\mathcal{U}$ está sobrentendido por el contexto)

$$A = \{x \,/\, P(x)\} = \{x \,:\, P(x)\}$$

y se lee: A es el conjunto formado por los elementos x pertenecientes a $\mathcal{U}$, tales que $P(x)$.

$P(x)$ es una *función proposicional*, que señala la propiedad en cuestión y un elemento del conjunto referencial $\mathcal{U}$, ($a \in \mathcal{U}$) pertenece al conjunto A si y sólo si verifica la propiedad $P(x)$, es decir,

$$a \in A \Leftrightarrow P(a) \text{ es } V.$$

Por otra parte si un elemento del conjunto referencial U ($a \in \mathcal{U}$), no está en A (se lee $a \notin A$), si no verifica la propiedad $P(x)$, esto es:

$$a \notin A \Leftrightarrow \; P(a) \; \text{ es } F.$$

En el Ejemplo (3) si $A = \{x \in \mathcal{U} \,/\, x \text{ es una vocal}\}$, $\mathcal{U}$, es el alfabeto. Tenemos que $P(x)$: "x es una vocal", por lo tanto $a \in A$, por que $P(a)$ es una proposición V, en cambio $b \notin A$, por que $P(b)$ es F.

Al número de elementos de un conjunto A se lo llama cardinalidad. Formalmente

Definición 2 *La cardinalidad de un conjunto A, que lo indicamos con $|A|$ o $\#A$, es el número o cantidad de elementos (distintos) de A.*

Ejemplo 4 *Calcular la cardinalidad del conjunto A de las raíces terceras de -1,*

1. *Si el conjunto referencial $\mathcal{U}$ es el conjunto de los números complejos , A se define por compresión como*

   $$A = \left\{w \in \mathbb{C} \,/\, w^3 = -1\right\}.$$

   y la propiedad que caracteriza a los elementos de A es: $P(w) : w^3 = -1$. Ya que esta ecuación tiene 3 raíces, la cardinalidad de A es $|A| = 3$ y el conjunto A, dado por extensión es

   $$A = \left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \; -1, \; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

2. *Si el conjunto referencial U es el conjunto de los números reales. El conjunto A se define por compresión como*

   $$A = \left\{w \in \mathbb{R} \,/\, w^3 = -1\right\}$$

   y la propiedad que caracteriza a los elementos de A es: $P(w)$, en este caso la ecuación $w^3 = -1$ solo tiene una raiz: $w = -1$, por lo tanto el conjunto A, definido por extensión es $A = \{-1\}$, y la cardinalidad de A es $|A| = 1$.

3.2.1 Conjuntos especiales

Un conjunto *unitario* está formado por un único elemento.

Ejemplo 5 *Si A es el conjunto cuyo único elemento es a, escribiremos*

$$A = \{a\} = \{x \,/\, x = a\}$$

El conjunto *vacío* es el conjunto sin elementos, es decir que su cardinalidad es igual a cero. Consideramos el conjunto

$$\{x \in \mathcal{U} \,:\, x \notin \mathcal{U}\}$$

la proposición: "$\forall \; x \in \text{U} \;:\; x \notin \text{U}$" es falsa. En otras palabras, no posee elementos, es decir, es un conjunto vacío. ¿Podemos decir que este conjunto es el único con esta propiedad? La respuesta es sí, como demostraremos en la proposición1 y lo indicamos con la letra ϕ.