Práctico Nº 6: Geometría Analítica

Rectas

1) Considerar la recta de R^2 de ecuación vectorial $r:(x,y)=(-1,3)+\lambda(4,-2)$:

a) Representarla gráficamente. Marcar los puntos correspondientes a $\lambda = 0, 1, 2, \frac{1}{2}, -1$.

b) Obtener ecuaciones paramétricas para *r*.

c) Determinar analíticamente cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta**:**

A (-9,7) , *B* (-3,3) , *C* (5,0) , *D* (5,4), *E* (11,-5).

d) Representar en el plano el conjunto $\{(-1,3)+\lambda(4,-2)\,/\,1<\lambda\leq 3\}$.

e) Obtener analíticamente la ecuación explícita de *r*. Relacionar con el gráfico de la parte **a**.

2) Obtener una representación paramétrica y una ecuación vectorial de la recta dada. Graficar:

a) La recta que pasa por el punto $P(-6,-1)$ en la dirección del vector $\vec{u}=(2,1)$.

b) La recta que pasa por los puntos *P* (-5,2) y *Q* (0 ,7).

c) La recta que pasa por *S* (4,-1) y es perpendicular al vector $\vec{d}=(8,1)$.

3) Para cada una de las siguientes rectas en R^3:

i) Obtener una representación paramétrica y una ecuación vectorial.

ii) Usar sus ecuaciones paramétricas para determinar los puntos de intersección con los planos coordenados $x=0$, $y=0$ y $z=0$.

iii) Graficarla, señalando los puntos de intersección encontrados en el inciso anterior.

a) La recta que pasa por *P* (2,0,0) y es paralela a la recta $\{(-2+t,1+3t,4)\,/\,t\in R\}$.
b) La recta por los puntos *P* (5,3 ,4) y *Q* (-2,3,-1).
c) La recta que pasa por el origen y es perpendicular a $5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ y a $2\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

4) Sea *r* la recta de R^3 de ecuación $\overrightarrow{OX}=\mathbf{j}+t\,\mathbf{i}$, $t\in R$. Dé ecuaciones vectoriales de tres rectas que pasen por *P*(0,1,0) y que, siendo ortogonales a *r*, tengan distintas direcciones. Represente gráficamente las cuatro rectas.

5) Estudiar las posiciones relativas de cada par de rectas y graficar. Cuando se corten, señalar el punto de intersección.

a) $\begin{cases} x = 1-5\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z=-5+\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z=\mu \end{cases}$ $\lambda,\mu\in R$

Sol: se cruzan

b) $\begin{cases} x = 3+2\alpha \\ y = 1-\alpha \\ z=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1-6\beta \\ y = 3+3\beta \\ z=5 \end{cases}$ $\alpha,\beta\in R$

Sol: son la misma recta

c) $\begin{cases} x = 3+2s \\ y = 1-s \\ z = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1-6t \\ y = 3+3t \\ z = 1 \end{cases}$ $s,t \in R$ **d)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = \mu \end{cases}$ $\lambda, \mu \in R$

Sol: son paralelas disjuntas Sol: se cortan en el punto $(3,3,0)$

e) $\begin{cases} x = 5-t \\ y = 2+t \\ z = t \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2+3s \\ y = 9-3s \\ z = 7+s \end{cases}$ $s,t \in R$ **f)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3+\alpha \\ z = 4+\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = -5+\lambda \end{cases}$ $\lambda, \alpha \in R$

g) $\begin{cases} x = 7-3\lambda \\ y = 2-2\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2+2t \\ z = -1+t \end{cases}$ $\lambda, t \in R$ **h)** $\begin{cases} x = -2+3\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-z = 0 \\ x-y-5z = 8 \end{cases}$ $\lambda \in R$

Planos

6) Para cada plano encontrar dos puntos de R^3 que pertenezcan a él y dos que no:

$\alpha: \ -2x + y - 3z = 1$ $\beta: \ 2x - y = 3$ $\delta: \ z = -1$

$\pi: \ (x,y,z) = (1,2,0) + s\,(0,2,3) + t\,(1,-1,0) \quad s,t \in R$ $\theta: \begin{cases} x = 4-\lambda \\ y = 1+2\mu, \quad \lambda, \mu \in R \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$

7) Para cada uno de los siguientes planos:

a) $y = 0$	**b)** $x = 3$	**c)** $z - 5 = 0$
d) $x - y = 0$	**e)** $x + z - 2 = 0$	**f)** $z - 5x = 0$
g) $2x + 3y + 4z = 12$	**h)** $-2x + y - 5z - 10 = 0$	**i)** $3x + y - 2z + 6 = 0$
j) $-x - y + z = 0$	**k)** $5y - 3z = 2$	**l)** $2x + 2y - z = 0$

i) Representarlo gráficamente en R^3.

ii) Encontrar un vector normal al plano y representarlo en el mismo gráfico.

8) Encontrar una ecuación implícita o vectorial del plano en cuestión. *Sugerencia*: bosquejar gráficos de planos, puntos, vectores y rectas que ilustren cada situación:

a) El plano pasa por $P(-2,\ 1,0)$ y es perpendicular a $\vec{n} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

b) El plano pasa por $Q(2,0,-6)$ y es paralelo al plano $4x - y - 2z = 10$.

c) El plano pasa por $P(-9,1,2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{a} = (5,0,2)$ y $\vec{b} = (2,1,0)$.

d) El plano contiene a los puntos $P(0,\ -1,2),Q(1,\ 0,-1)$ y $R(3,\ 4,0)$.

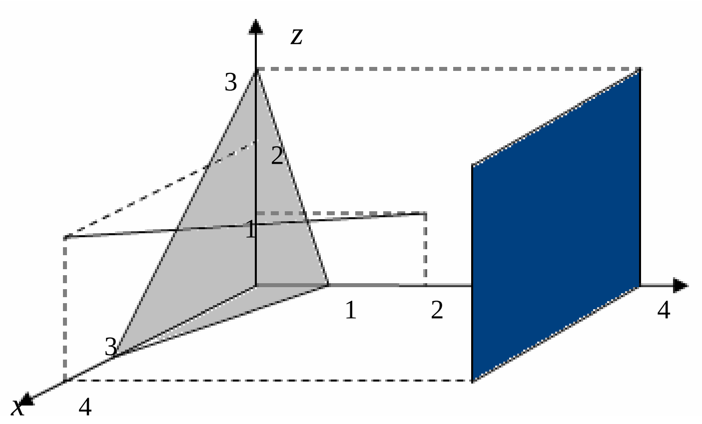
e) El plano es paralelo a $\pi = \{(2\lambda + 3\mu,\ 6,\ 7 - \lambda + \mu) \ / \ \lambda, \mu \in R\}$ y pasa por $M(0,\ -2,5)$.

f) El plano contiene a $P(3,0,4)$ y a la recta $r: (x,y,z) = (0,2,3) + \mu\ (1,0,-1),\ \mu \in R$.

g) El plano que contiene a las rectas $r: (x,y,z) = (2,1,6) + \mu\ (3,0,0), \mu \in R$ y $s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$.

h) El plano paralelo al eje y que contiene a la recta $r = \{(\alpha, 0, 1+\alpha) / \alpha \in R\}$.

9) Obtener ecuaciones para los planos y la recta representados en el siguiente gráfico:



10) Obtener ecuaciones paramétricas y vectoriales para los siguientes planos:

$\alpha:\ -3x + y - 7 = 1 \qquad \beta:\ 4x - 6y + 5z = 3 \qquad \delta:\ x + 4z = -1 \qquad \tau:\ y = 7$

11) Dar ecuaciones implícitas para los siguientes planos:

$\pi:\ (x, y, z) = (0, -1, 0) + s\,(0, 2, 3) + t\,(-4, 2, 1),\ \ s, t \in R$

$\sigma: (x, y, z) = (6, 1, -8) + \alpha\,(0, -1, 9) + \beta\,(0, 1, 1),\ \ \alpha, \beta \in R$

$$\theta: \begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = 1 + 2\lambda + 4\mu, \quad \lambda, \mu \in R \\ z = -3 - \lambda - 2\mu \end{cases}$$

12) Dados los planos: $\alpha:\ -8x + 2y - 4z = 6 \qquad \gamma:\ -8x + 2y - 4z + 7 = 0$

$\beta:\ 4x - y + 2z + 3 = 0 \qquad \delta: 12x - 3y + 9z = 4$

Determinar la posición relativa e intersección de:

a) α y γ **b)** β y γ **c)** α y β **d)** β y δ

13) Estudiar la posición relativa de los dos planos:

$$\theta: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \mu \quad \lambda, \mu \in R \\ z = 4 + \mu \end{cases} \quad \text{y} \quad \phi: (x, y, z) = (0, 0, 3) + \alpha\,(0, 2, 0) + \beta\,(1, 1, 0)\ ,\ \alpha, \beta \in R$$

14) En cada caso, estudiar la posición relativa de la recta y el plano. Graficar.

a) $2x - y + 3z = 8\ ;\ \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases},\ \lambda \in R$ **b)** $\{(0, 2z - 2, z) / z \in R\}\ ;\ \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{8} = 1.$

c) $(x, y, z) = (0, 2, 3) + \sigma(3, -2, 0), \sigma \in R\ ;\ (x, y, z) = (0, 0, 4) + s\,(3, 0, 4) + t\,(0, 1, 2)\ ,\ s, t \in R.$

15) Encontrar el valor de las constantes h y k de modo tal que el plano $\pi : hx + ky + 2z + 5 = 0$:

- **a)** pase por los puntos $P(1,2,-4)$ y $Q(-2,3,1)$.
- **b)** sea perpendicular al vector $\vec{n} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$.
- **c)** sea paralelo al plano $\alpha : x - 5y + 3z - 9 = 0$.

16) Responder a las siguientes preguntas, realizando **gráficos** para ilustrar sus respuestas:

- **a)** ¿Puede ser nulo el vector director de una recta? Justifique.
- **b)** ¿Cómo deben ser entre sí los dos vectores directores de un plano?
- **c)** ¿Qué tipo de conjunto representa la ecuación $(x, y, z) = (0,1,0) + \alpha(3,-1,4) + \beta(-6,2,-8)$?
- **d)** Si el plano $ax + by + cz = d$ tiene vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ¿qué relación existe entre los vectores $\vec{n} = (a,b,c)$ y $\vec{u} \times \vec{v}$?
- **e)** ¿Qué particularidad tiene un plano de ecuación $ax + by + cz = 0$?
- **f)** ¿Qué puede decir sobre los planos $ax + by + cz = d$ y $ax + by + cz = e$ si $d \neq e$?
- **g)** Dados dos puntos distintos del espacio, ¿qué debe cumplir un tercer punto para que sólo exista un plano que contenga a los tres?
- **h)** Si se sabe que una recta *r* es paralela a cierta recta *s*, ¿cómo deben ser *r* y *s* para que existan infinitos planos que contengan a ambas rectas a la vez?
- **i)** Dado un vector de $R^3 - \{\vec{0}\}$, ¿cómo se distribuyen *todos* los vectores ortogonales a él?
- **j)** Suponga que dos planos se cortan en una recta. Si los planos tienen vectores normales $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ ¿Qué relación existe entre $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ y un vector director de la recta?