Unidad 2: Lógica

2.1 Introducción

La **lógica** es una disciplina que estudia la estructura, el fundamento y el uso de las expresiones del lenguaje humano. La utilizamos en nuestra vida cotidiana y una de sus principales tareas es la de proporcionar las *reglas* por medio de las cuales podemos determinar cuando un *razonamiento o argumento es válido.* Aristóteles (384-322 a. C.) fue el formalizador de la *lógica formal.* Actualmente es muy utilizada en todas las ramas de las ciencias y tiene importantes aplicaciones prácticas, por ejemplo sus reglas se utilizan en la escritura de programas de computación y un buen razonamiento lógico es esencial para la construcción y prueba de dichos programas. Otro ejemplo donde la lógica juega un papel fundemental es en el diseño de circuitos digitales. También es fundamental en matemáticas y en sus demostraciones.

En este capítulo daremos nociones básicas de lógica, operaciones entre proposiciones usando tablas de verdad, relaciones entre ellas a travez de leyes lógicas o tautologías, definiremos funciones proposicionales y finalmente introducimos el principio de inducción matemática.

2.2 Proposiciones

Los objetos de la lógica son las proposiciones. *Una **proposición** es una aserción o enunciado expresado en lenguaje natural escrito o hablado, mediante una expresión declarativa; que puede ser cierta o falsa, pero no ambas a la vez.* Las proposiciones son los elementos de la *lógica matemática.*

Las *proposiciones,* en general, son denotadas con las letras p, q, r, etc.

En el estudio de la lógica sólo se admiten como proposiciones a expresiones declarativas, no se admiten expresiones interrogativas, exclamativas, etc.

Ejemplo 1 1. ***Oraciones que son proposiciones:***

   (a) *El semáforo está verde.*

   (b) *Los autos pueden avanzar.*

   (c) *Hoy es 17 de marzo.*

   (d) *Hoy es jueves.*

   (e) *4 es un número par.*

2. ***Oraciones que no son proposiciones:***

   (a) *Deténgase.*

   (b) *¿Quien viene?*

   (c) *¿Es divertido este curso?*

   (d) *Si* $x^2 = 9$ *entonces* $x = 3$.

Diremos que es una *proposición* es *simple* si **no** puede dividirse o analizarse por medio de expresiones declarativas más sencillas. Generalmente nuestros razonamientos son más complejos. Es necesario combinar expresiones simples para formar otras más complejas, que son las **proposiciones compuestas.**

2.2.1 Proposiciones Compuestas y Conectivos Lógicos

A partir de *proposiciones simples* se pueden generar otras *compuestas*, agrupándolas mediante conectores, llamados *conectivos lógicos,* es decir, *una proposición compuesta es una proposición que está formada por proposiciones simples unida por conectivos lógicos.*

Ejemplo 2 *Dadas las proposiciones simples:*
p : *El semáforo está verde.*
q : *Los autos pueden avanzar.*
Construimos, por ejemplo, las siguientes proposiciones compuesta:

1. *Si* p *entonces* q*: "si el semáforo esta verde entonces los autos pueden avanzar".*

2. *Si no* p *entonces no* q*: "si el semáforo no esta verde entonces los autos no pueden avanzar".*

Ejemplo 3 *Dada la proposición compuesta:*

1. *"Las compuertas lógicas son la base para el desarrollo de circuitos integrados más complejos y el diseño de sistemas digitales"*

   Las proposiciones simples que la componen son:

   p : *Las compuertas lógicas son la base para el desarrollo de circuitos integrados más complejos.*

   q : *Las compuertas lógicas son la base para el diseño de sistemas digitales.*

2. *"Todo número natural múltiplo de* 4*, es múltiplo de* 2*".*

   Las proposiciones simples que la componen son:

   r : *Todo número natural es múltiplo de* 4.

   s : *Todo número natural es múltiplo de* 2.

El valor de verdad de estas proposiciones compuestas dependen del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen y del conectivo que las une. Las proposiciones compuestas son de algunos de los tres tipos siguientes:

Definición 1 *Una proposición compuesta es una* ***ley lógica*** *o* ***tautología*** *si es verdadera independientemente de los valores de verdad que se asignen a las proposiciones simples que la componen. Es decir que una ley lógica o tautología es una proposición que es verdadera en cualquier circunstancia.*

Definición 2 *Una proposición compuesta es una* ***contradicción*** *si es falsa independientemente de los valores de verdad que se asignen a las proposiciones simples que la componen. Es decir que es falsa en cualquier circunstancia.*

Definición 3 *Una proposición compuesta es* ***contingencia*** *si no es una tautología ni una contradicción.*

En el caso que **no** se conozcan los valores de verdad de una proposición compuesta, formada por n proposiciones simples, tendremos que analizar 2^n posibles casos. Una forma práctica de conocer todos los valores, es construir una tabla de verdad.

Una **tabla de verdad** muestra los valores de verdad de una proposición compuesta para todos los posibles casos, de verdad o falsedad, de las proposiciones simples.

En el lenguaje coloquial una misma expresión puede darse de distintas formas. En lógica dos proposiciones compuestas son *lógicamente equivalentes* si tienen igual valor de verdad, para el mismo juego de verdades de las proposiciones simples que la componen. Formalmente

Definición 4 *Dos proposiciones p y q son **lógicamente equivalentes**, lo denotamos $p \equiv q$, si tienen la misma tabla de verdad.*

A continuación definiremos las operaciones básicas entre proposiciones simples que forman las proposiciones compuestas

Negación

Definición 5 *La **negación** de la proposición p, es la proposición $\backsim p$ (se lee no p) que es verdadera cuando p es $falsa$, y es $falsa$ cuando p es $verdadera$.*

La tabla de verdad es

p	$\backsim p$
V	F
F	V

La negación de un enunciado se puede expresar prefijando la frase "no", "es falso que", o "no es el caso que", etc.

Ejemplo 4 *Dada la proposición p : "Todo hombre es honesto".*
La negación de p es la proposición: $\backsim p$: "No todo hombre es honesto".
o bien:
$\backsim p$: No es cierto que todo hombre es honesto.
$\backsim p$: hay hombres que no son honestos.
$\backsim p$: Existen hombres deshonestos.

Proposición 1 *$\backsim(\backsim p)$ es lógicamente equivalente a p.*

Demostración. Para verificar esta afirmación analicemos todos los posibles valores de verdad:

p	$\backsim p$	$\backsim(\backsim p)$
V	F	V
F	V	F

Observamos que las columnas de la tabla de verdad de p y $\backsim(\backsim p)$ son iguales, por lo tanto, las proposiciones son lógicamente equivalentes. ■

Conjunción

Definición 6 *La **conjunción** de p y q, denotada con $p \wedge q$, (se lee p y q) es la proposición que es verdadera cuando ambas, p y q, son verdaderas, y es falsa, cuando p o q, o ambas son falsas.*

La tabla de valores de verdad es

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo 5 *Dadas las proposiciones p : "3 es un número impar". q : "8 es un número impar".*
La conjunción de p y q, es: $p \wedge q$: "3 y 8 son números impares".
Por ser p verdadera y q falsa la conjunción de p y q es falsa.

Disyunción y Diferencia Simétrica

Definición 7 *La* ***disyunción*** *de p y q, denotada con $p \vee q$, (se lee p o q) es la proposición que es verdadera cuando p o q o ambas son verdaderas, y es falsa, cuando ambas p y q son falsas.*

La tabla de valores de verdad es

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción de dos enunciados se forma insertando la palabra "o" entre ellos. Los dos componentes combinados de esta forma se llaman disjuntos o alternativas.

Ejemplo 6 *Dadas las proposiciones p : "3 es un número impar" y q : "8 es un número impar". La disyunción de p y q, es: $p \vee q$: "3 o 8 son números impares". Por ser p verdadera la conjunción es verdadera.*

La conjunción *"o"* puede interpretarse de dos formas distintas.

- Una disyunción *débil o inclusiva*, denotada por $p \vee q$ es verdadera solamente cuando una o ambas alternativas son verdaderas. Solamente si los dos alternativas son falsas, la disyunción inclusiva es falsa. El *"o"* inclusivo tiene el sentido de *"cualquiera, posiblemente ambos"*. En algunas situaciones se puede representar como "y/o".

- La palabra *"o"* también se utiliza en un sentido *fuerte o exclusivo*, en el cual el significado no es *"por lo menos uno"* sino *"uno y sólo uno"*. El *"o"* exclusivo se denota por $p \veebar q$, también se lo llama **diferencia simétrica**. La proposición compuesta $p \veebar q$ es verdadera si una o la otra pero <u>no ambas</u> proposiciones p, q son verdaderas.

La tabla de valores de verdad es

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 7 *Dada la proposición "El lunes viajaré en colectivo o avión". Tenemos que p : "El lunes viajaré en colectivo" y q : "El lunes viajaré en avión". Observamos que las proposiciones p y q no pueden ser simultáneamente, verdaderas.*

Condicional

Definición 8 *El* ***condicional*** *$p \Rightarrow q$ (se lee "si p entonces q") significa que la verdad de p implica la verdad de q. Es decir, si p es verdadera, entonces q debe ser verdadera. La única manera de la implicación $p \Rightarrow q$ sea falso es que p sea verdadera y q es falsa.*