

Unidad 2: Lógica

2.1 Introducción

La **lógica** es una disciplina que estudia la estructura, el fundamento y el uso de las expresiones del lenguaje humano. La utilizamos en nuestra vida cotidiana y una de sus principales tareas es la de proporcionar las *reglas* por medio de las cuales podemos determinar cuando un *razonamiento o argumento es válido*. Aristóteles (384-322 a. C.) fue el formalizador de la *lógica formal*. Actualmente es muy utilizada en todas las ramas de las ciencias y tiene importantes aplicaciones prácticas, por ejemplo sus reglas se utilizan en la escritura de programas de computación y un buen razonamiento lógico es esencial para la construcción y prueba de dichos programas. Otro ejemplo donde la lógica juega un papel fundamental es en el diseño de circuitos digitales. También es fundamental en matemáticas y en sus demostraciones.

En este capítulo daremos nociones básicas de lógica, operaciones entre proposiciones usando tablas de verdad, relaciones entre ellas a través de leyes lógicas o tautologías, definiremos funciones proposicionales y finalmente introducimos el principio de inducción matemática.

2.2 Proposiciones

Los objetos de la lógica son las proposiciones. Una **proposición** es una aserción o enunciado expresado en lenguaje natural escrito o hablado, mediante una expresión declarativa; que puede ser cierta o falsa, pero no ambas a la vez. Las proposiciones son los elementos de la *lógica matemática*.

Las *proposiciones*, en general, son denotadas con las letras p, q, r , etc.

En el estudio de la lógica sólo se admiten como proposiciones a expresiones declarativas, no se admiten expresiones interrogativas, exclamativas, etc.

Ejemplo 1 1. Oraciones que son proposiciones:

- (a) El semáforo está verde.
- (b) Los autos pueden avanzar.
- (c) Hoy es 17 de marzo.
- (d) Hoy es jueves.
- (e) 4 es un número par.

2. Oraciones que no son proposiciones:

- (a) Deténgase.
- (b) ¿Quién viene?
- (c) ¿Es divertido este curso?
- (d) Si $x^2 = 9$ entonces $x = 3$.

Diremos que es una *proposición simple* si **no** puede dividirse o analizarse por medio de expresiones declarativas más sencillas. Generalmente nuestros razonamientos son más complejos. Es necesario combinar expresiones simples para formar otras más complejas, que son las **proposiciones compuestas**.

2.2.1 Proposiciones Compuestas y Conectivos Lógicos

A partir de *proposiciones simples* se pueden generar otras *compuestas*, agrupándolas mediante conectores, llamados *conectivos lógicos*, es decir, *una proposición compuesta es una proposición que está formada por proposiciones simples unida por conectivos lógicos*.

Ejemplo 2 Dadas las proposiciones simples:

p : El semáforo está verde.

q : Los autos pueden avanzar.

Construimos, por ejemplo, las siguientes proposiciones compuestas:

1. Si p entonces q : “si el semáforo está verde entonces los autos pueden avanzar”.
2. Si no p entonces no q : “si el semáforo no está verde entonces los autos no pueden avanzar”.

Ejemplo 3 Dada la proposición compuesta:

1. “Las compuertas lógicas son la base para el desarrollo de circuitos integrados más complejos y el diseño de sistemas digitales”

Las proposiciones simples que la componen son:

p : Las compuertas lógicas son la base para el desarrollo de circuitos integrados más complejos.

q : Las compuertas lógicas son la base para el diseño de sistemas digitales.

2. “Todo número natural múltiplo de 4, es múltiplo de 2”.

Las proposiciones simples que la componen son:

r : Todo número natural es múltiplo de 4.

s : Todo número natural es múltiplo de 2.

El valor de verdad de estas proposiciones compuestas dependen del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen y del conectivo que las une. Las proposiciones compuestas son de algunos de los tres tipos siguientes:

Definición 1 Una proposición compuesta es una **ley lógica** o **tautología** si es verdadera independientemente de los valores de verdad que se asignen a las proposiciones simples que la componen. Es decir que una ley lógica o tautología es una proposición que es verdadera en cualquier circunstancia.

Definición 2 Una proposición compuesta es una **contradicción** si es falsa independientemente de los valores de verdad que se asignen a las proposiciones simples que la componen. Es decir que es falsa en cualquier circunstancia.

Definición 3 Una proposición compuesta es **contingencia** si no es una tautología ni una contradicción.

En el caso que **no** se conozcan los valores de verdad de una proposición compuesta, formada por n proposiciones simples, tendremos que analizar 2^n posibles casos. Una forma práctica de conocer todos los valores, es construir una tabla de verdad.

Una **tabla de verdad** muestra los valores de verdad de una proposición compuesta para todos los posibles casos, de verdad o falsedad, de las proposiciones simples.

En el lenguaje coloquial una misma expresión puede darse de distintas formas. En lógica dos proposiciones compuestas son *lógicamente equivalentes* si tienen igual valor de verdad, para el mismo juego de verdades de las proposiciones simples que la componen. Formalmente

Definición 4 Dos proposiciones p y q son **lógicamente equivalentes**, lo denotamos $p \equiv q$, si tienen la misma tabla de verdad.

A continuación definiremos las operaciones básicas entre proposiciones simples que forman las proposiciones compuestas

Negación

Definición 5 La **negación** de la proposición p , es la proposición $\sim p$ (se lee no p) que es verdadera cuando p es falsa, y es falsa cuando p es verdadera.

La tabla de verdad es

p	$\sim p$
V	F
F	V

La negación de un enunciado se puede expresar prefijando la frase “no”, “es falso que”, o “no es el caso que”, etc.

Ejemplo 4 Dada la proposición p : “Todo hombre es honesto”.

La negación de p es la proposición: $\sim p$: “No todo hombre es honesto”.

o bien:

$\sim p$: No es cierto que todo hombre es honesto.

$\sim p$: hay hombres que no son honestos.

$\sim p$: Existen hombres deshonestos.

Proposición 1 $\sim(\sim p)$ es lógicamente equivalente a p .

Demostración. Para verificar esta afirmación analicemos todos los posibles valores de verdad:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

Observamos que las columnas de la tabla de verdad de p y $\sim(\sim p)$ son iguales, por lo tanto, las proposiciones son lógicamente equivalentes. ■

Conjunción

Definición 6 La **conjunción** de p y q , denotada con $p \wedge q$, (se lee p y q) es la proposición que es verdadera cuando ambas, p y q , son verdaderas, y es falsa, cuando p o q , o ambas son falsas.

La tabla de valores de verdad es

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo 5 Dadas las proposiciones p : “3 es un número impar”. q : “8 es un número impar”.

La conjunción de p y q , es: $p \wedge q$: “3 y 8 son números impares”.

Por ser p verdadera y q falsa la conjunción de p y q es falsa.

