Práctico Nº 8: Matrices

Ej. 1: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$, calcular:

a) $A+B$ **b)** $A-B$ **c)** $6A^T-\frac{3}{2}B$ **d)** AB y BA **e)** $B^T A^2$

Ej. 2: Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 5 & -1 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2 & 10 & 8 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -5 & -4 & 2\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 0\\ -5 & -15 & 0\end{pmatrix}$$

Efectuar todos los posibles productos entre ellas (incluyendo *D.D*, son 6 multiplicaciones).

Ej. 3: Obtener las matrices traspuestas de $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 8 & 5 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 6 & 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

Ej. 4: Demostrar las siguientes propiedades de la transposición de matrices. Verificar **d)** para las matrices *A* y *B* del ejercicio anterior:

a) $\left(A^T\right)^T=A$.

b) $\forall\alpha\in\mathbf{R}\ (\alpha\, A)^T=\alpha\, A^T$.

c) Si *A* y *B* son matrices *m* x *n*, entonces $(A+B)^T=A^T+B^T$.

d) Si *A* es una matriz *m* x *n* y *B* es una matriz de *n* x *r*, entonces $(AB)^T=B^T A^T$.

Ej. 5: Obtener las matrices *X* e *Y* que resuelven las ecuaciones $2X+Y=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ y $X-Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Ej. 6: A continuación se presentan tres propiedades de los números reales que no necesariamente se cumplen para matrices. Para cada una dar un contraejemplo con matrices de 2x2:

a) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

b) $AB=O\Rightarrow(A=O\vee B=O)$

c) $(AC=BC\wedge C\neq O)\Rightarrow A=B$

Ej. 7: Aplicar la definición de matriz inversa para demostrar que si *A* y *B* son inversibles, entonces:

a) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$ **c)** $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **d)** $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1},\ \lambda \neq 0$

Ej 8: Sea A una matriz inversible de n x n. Demostrar que si $AB = I_n$, entonces $B = A^{-1}$.

<u>Nota</u>: *Del mismo modo, se demuestra que si A es inversible y $BA = I_n$, entonces $B = A^{-1}$, de modo que basta verificar que uno de los dos productos es igual a la matriz identidad.*

Ej. 9: a) En los casos en que sea posible, calcular la inversa de la matriz dada:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Verificar que $AA^{-1} = I_2$ y que $D^{-1}D = I_3$

c) ¿Cuál es la matriz inversa de la matriz identidad?

Ej. 10: *<u>Inversa de una Matriz 2x2</u>*: Demostrar que si $D = ad - cb \neq 0$, $A_{2x2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Utilizar esta fórmula para confirmar los resultados del ejercicio anterior para matrices de 2x2.

Ej. 11: *<u>Formas Matricial y Vectorial de un Sistema de Ecuaciones</u>*: El objetivo de este ejercicio es destacar que resolver un sistema de ecuaciones lineales es equivalente a resolver una ecuación matricial y a expresar un vector como combinación lineal de otros.

Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ **b)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Ej. 12: Resolver en forma matricial los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x = 1 \\ y + z = 2 \\ x + z = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 8 \\ y + z = 13 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 10x - 5y + 9z = 48 \\ y - z = -4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ y - z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

Ej. 13: Resolver la ecuación matricial $XA^T + XB = C$, para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ej. 14:

a) Demostrar que si $\alpha \in R$ y X es una matriz *nxn*: $\alpha X = (\alpha I_n)X$.

b) Obtener las matrices *X* e *Y* que resuelven las ecuaciones:

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ej. 15: Determinar los posibles valores de *k* para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ k & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es inversible.

Ej. 16:

Algunas Equivalencias para Matrices Inversibles

Dada una matriz A de n x *n las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) A^{-1} *existe, es decir A es inversible.*
ii) *El sistema homogéneo AX=0 tiene como única solución la trivial: X=0.*
iii) *Todo sistema de forma matricial* $AX = B$ *es compatible determinado.*

a) Dadas las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, verificar que A_1 cumple los tres criterios y A_2 no cumple ninguno.

b) Demostrar que las tres condiciones son equivalentes. ***Sugerencia***: $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$

Ej. 17: Si *A* es una matriz singular (no inversible), un sistema de ecuaciones de forma matricial

$$AX = B$$

no puede ser compatible determinado. Utilizando la matriz *A* del **ejercicio 13**, elegir distintas matrices columna B_{3x1} para obtener un sistema incompatible y otro compatible indeterminado.

¿Qué tipo de subconjunto de R^3 generan las columnas de *A*?¿Cómo se interpreta geométricamente la existencia o inexistencia de soluciones del sistema?