Unidad 6: Sistemas de ecuaciones

6.1 Introducción

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área, o volumen. Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos. Thymaridas (400 a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Los sistemas de ecuaciones aparecen también en los documentos indios. No obstante, no llegan a obtener métodos generales de resolución, sino que resuelven tipos especiales de ecuaciones. En este cápitulo daremos el Método de eliminación, aunque existe hace siglos, fue sistematizado por Karl F. Gauss (1777-1855) Camille Jordan (1838-1922). En la actualidad, este método se utiliza para resolver sistemas de gran tamaño por medio de computadoras.

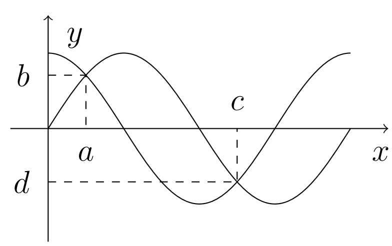
En matemática mas del 75% de los problemas que se encuentran en aplicaciones científicas o industriales se requiere trabajar en forma simultánea con mas de una ecuación donde aparecen variables diversas, es decir, con sistemas de ecuaciones y en gran parte de estos son sistemas lineales.

De aquí se deriva el enorme interés por conseguir métodos rápidos, eficaces y económicos para resolver estos sistemas. En este capítulo veremos métodos para hallar soluciones comunes a todas las ecuaciones del sistema.

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales hasta la llegada de los computadores digitales (segunda mitad del siglo XX) estaba muy limitada, no por la complejidad del problema, sino por el número de operaciones aritméticas que se debían realizar. Ahora se puede resolver con un PC un sistema 1000×1000 en pocos segundos.

6.2 Sistemas de ecuaciones

Consideremos dos funciones f y g (figura 1). Cada una de las ecuaciones $y = f(x)$, $y = g(x)$ tienen infinitas soluciones que se sitúan, respectivamente, en cada una de las gráficas de las funciones dibujadas. En la práctica, en ocasiones hay que encontrar puntos comunes $P = (a, b)$ y $Q = (c, d)$, en donde las gráficas se intersecan.



Decimos que el punto $P = (a, b)$ es **solución** del sistema de ecuaciones si es simultáneamente solución de cada una de las ecuaciones que forman el sistema.

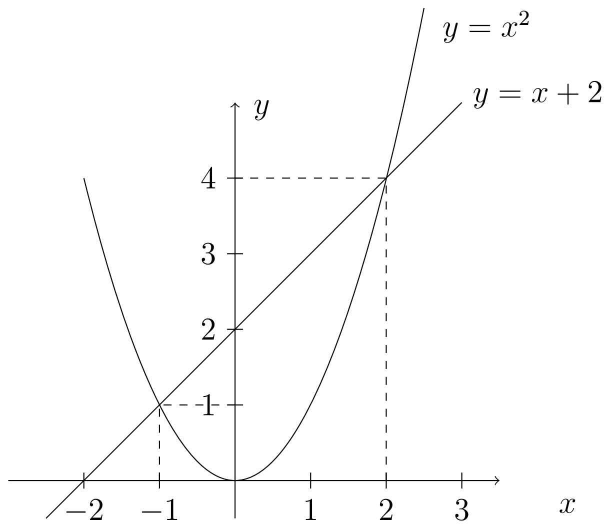
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad \text{es decir} \quad \begin{matrix} b = f(a) \\ b = g(a) \end{matrix} \quad \text{y}$$

Resolver un sistema de ecuaciones, consiste en encontrar **todos los puntos** que son solución de sistema.

Por ejemplo, consideremos el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Las gráficas de las ecuaciones son las parábola y la recta de la figura 2. Las soluciones de este sistema son los puntos $(-1, 1)$ y $(2, 4)$.



Si consideramos el sistema

$$\begin{cases} z = \sqrt{5} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son los puntos de corte del plano $(z = \sqrt{5})$ con los de la superficie esférica $(x^2 + y^2 + z^2 = 9)$. Estos están situados sobre una circunferencia $(x^2 + y^2 = 4)$.

En esta unidad solo trabajaremos con sistemas de ecuaciones lineales o simplemente sistemas lineales.

6.3 Sistemas de ecuaciones lineales

Una *ecuación lineal* con n *incógnitas* tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, ..., a_n$ y b son números reales y $x_1, x_2, ...x_n$ son variables. Por lo tanto un *sistema* de m *ecuaciones lineales*, con n incógnitas tiene la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Donde los términos a_{ij} y b_i son números reales. Nos referiremos a los sistemas de la forma (1) como *sistema lineale mxn*. Si en el sistema (1) todos los b_i son igual a 0, el sistema se llama **sistema homgéneo**.

Ejemplo 1 *Clasificar los sistemas siguientes*

$$(a)\left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2=5 \\ 2x_1+3x_2=8 \end{array}\right. \qquad (b)\left\{\begin{array}{l} 2x_1+3x_2+4x_3=1 \\ 3x_1+4x_2+5x_3=3 \end{array}\right.$$

$$(c)\left\{\begin{array}{r} x_1+x_2=1 \\ x_1-x_2=2 \\ -2x_2=3 \end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(e)\left\{\begin{array}{ccccccccc} -2x & + & 3y & + & 4z & & & = & -1 \\ x & & & - & 2z & + & 2w & = & 1 \\ & & y & + & z & + & w & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 2z & - & w & = & 3 \end{array}\right.$$

El sistema (a) es un sistema de 2x2, (b) es un sistema de 2x3, (c) es de 3x2, (d) sistema homogéneo de 3x3y (e) un sistemas 4x4.

Una **solución** de un sistema lineales mxn es un n-upla de números que satisface todas las ecuaciones. El conjunto de todas las soluciones del sistema recibe el nombre de **conjunto solución.**

Ejemplo 2 *Verificar que*

1.- $(1,2)$ *es una solución del sistema (a), ya que:*

$$\begin{aligned} 1.(1)+2.(2) &= 5, \\ 2.(1)+3.(2) &= 8. \end{aligned}$$

2.- $(5,-3,0)$ *y* $(0,7,-5)$ *son soluciones de (b), puesto que:*

$$\begin{array}{c} 2.(5)+3.(-3)+4.(0)=1 \\ 3.(5)+4.(-3)+5.(0)=3 \end{array}$$

Análogamente tenemos que:

$$\begin{array}{c} 2.(0)+3.(7)+4.(-5)=1 \\ 3.(0)+4.(7)+5.(-5)=3 \end{array}$$

3.- $(0,0,0)$ *es una solución de (d).*

Nos preguntamos ahora ¿Cómo determinar si un sistema tiene solución?¿Cuál o cuales son las soluciones del sistema?

En general diremos que "si un sistema de ecuaciones tiene solución", es **compatible** y **compatible determinado** si la solución es única, mientras que si tiene infinitas soluciones, **compatible indeterminado.**

Si el sistema no tiene solución, es decir el conjunto solución es vacío, diremos que es **incompatible** o **inconsistente**.

Por lo tanto **resolver un sistema es dar el conjunto solución.**

Es inmediato probar el siguiente resultado sobre sistemas homogéneos:

Teorema 1 *Todo sistema homogéneo es compatible y tienen al menos una solución.*

Demostración. Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0 \end{array}\right. \tag{2}$$

Notemos que independiente del valor de los coeficientes a_{ij}, $(0,...,0)$ es una solución del sistema homogéneo (2) porque verifica todas las ecuaciones. ■

Dado el sistema homogeneo (2), a $(0,...,0)$ se la denomina *solución trivial.*

Estamos interesados en resolver el problema de obtener todas las soluciones de un sistema dado. Para ello estudiamos los **sistemas equivalentes.**

6.3.1 Sistemas Equivalentes

Dos ecuaciones con las mismas variables, se dicen **equivalentes** cuando tienen **igual conjunto solución**.

Ejemplo 3 *Verificar que:*

1. $x-3y=7$ *es equivalente a* $5x-15y=35$.

Ya que el conjunto solución de estas ecuaciones es $\left\{(x,y) : y=\frac{1}{3}x-\frac{7}{3} \ \wedge \ x\in\mathbb{R}\right\}$, *tenemos que son equivalentes*

2. $x+y+2z=1$ *es equivalente a* $5x+5y+10z=5$.

Estas dos ecuaciones representan el mismo plano. Por lo tanto son ecuaciones equivalentes.

Del mismo modo decimos:

Dos sistemas de ecuaciones con las mismas variables, son **equivalentes** cuando tienen **igual conjunto solución**.

Ejemplo 4 *Verificar que los siguientes sistemas son equivalentes:*

$$(a)\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ & & x_2 & & & = & 3 \\ & & & & 2x_3 & = & 4 \end{array}\right. \qquad (b)\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ -3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Los dos sistemas son compatibles determinados y la solución es $(-2,3,2)$.

Podemos observar que el sistema (a) es más sencillo de resolver que el sistema (b). Realizando algunas transformaciones podemos pasar del sistema (b) al sistema (a). Para ello sumamos las dos primeras ecuaciones del sistema (b) obteniendo:

$$\begin{array}{r} 3x_1+2x_2-x_3=-2 \\ -3x_1-x_2+x_3=5 \\ \hline x_2 \qquad =3 \end{array}$$

y si restamos la 3^a menos la 1^a ecuacion del sistema (b) obteniendo:

$$\begin{array}{r} 3x_1+2x_2+x_3=2 \\ 3x_1+2x_2-x_3=-2 \\ \hline 2x_3=4 \end{array}$$

Si (x_1, x_2, x_3) es solución del sistema (b) debe satisfacer todas las ecuaciones del sistema. Por lo tanto, también satisface cualquier nueva ecuación que se forme al sumar una con un múltiplo de otra de las ecuaciones. Por lo tanto, satisface $x_2 = 3$ y $2x_3 = 4$.

En consecuencia, cualquier solución del sistema (b) es también solución del sistema (a). Citando argumentos similares, puede demostrarse que cualquier solución del sistema (a) es también solución del sistema (b).

En síntesis algunas de las operaciones que podemos realizar para obtener sistemas equivalentes son:

1. Se pueden intercambiar el orden en el cual se escriben dos ecuaciones.

2. Una ecuación se puede multiplicar o dividir por una constante distinta de cero.

3. Un múltiplo de una ecuación se pude sumar a otra.

Dado un sistema de ecuaciones, el método que daremos utiliza estas operaciones para obtener un sistemas equivalentes más fácil de resolver.

6.3.2 Método de Gauss

Dado un sistema de ecuaciones, este método permite encontrar un sistema de "forma escalonada" equivalente al dado que es mas fácil de resolver.

Un sistema de ecuaciones es de **forma escalonada** si en la $k-$ésima ecuación los coeficientes de las primeras $k-1$ variables son cero y el de la $k-$ésima es distinto de cero.

Ejemplo 5 *Resolver el siguiente sistema dado en forma escalonada*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Para resolver estos sistemas usamos sustitución hacia atrás: de la tercera ecuación tenemos que $x_3 = 2$, *sustituyendo* x_3 *en la segunda ecuación tenemos* $x_2 - 2.(2) = -1$ *por lo tanto* $x_2 = 3$, *finalmente reemplazando* x_2 *y* x_3 *en la primer ecuación obtenemos;* $x_1 - 2.(3) + 3.(2) = 4$ *con lo cual* $x_1 = 4$. *Así, el sistema es compatible determinado y la solución es* $\{(4, 3, 2)\}$[1].

Sería muy deseable poder transforma cualquier sistema de ecuaciones en otro que tenga forma escalonada. El método que utilizaremos para ello es el *método* de *eliminación* de *Gauss* que consiste en eliminar, en cada paso, una variable para obtener finalmente un sistema escalonado equivalente al original. Veremos el método con un ejemplo.

Ejemplo 6 *: Resolver el sistema*

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} & 2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 3 \\ & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ - & 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

Solución: Para trabajar con mayor comodidad intercambiamos las dos primeras ecuaciones, obteniendo el sistema equivalente:

$$\left\{\begin{array}{rrcrcrcr} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & 2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 3 \\ - & 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

[1] En el caso que el conjunto solución tenga un solo elemento diremos que la solución es el elemento, es decir, en este caso tenemos que la solución es $(4, 3, 2)$.

1° paso: Eliminamos x_1 de la segunda ecuación. Para ello sumamos -2 veces la primera ecuación a la segunda y el resultado lo sustituimos en la segunda ecuación obteniendo el sistema equivalente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & 5x_2 & - & 10x_3 & = & -5 \\ -\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

2° paso: Eliminamos x_1 de la tercera ecuación. Sumamos 3 veces la primera ecuación a la tercera y el resultado lo sustituimos en la tercera ecuación obteniendo el sistema equivalente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & 5x_2 & - & 10x_3 & = & -5 \\ & - & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 10 \end{array}\right.$$

3° paso: Eliminamos x_2 de la tercera ecuación. Sumamos $\frac{2}{5}$ veces la segunda ecuación a la tercera y el resultado lo sustituimos en la tercera ecuación obteniendo el sistema equivalente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & 5x_2 & - & 10x_3 & = & -5 \\ & & & & 4x_3 & = & 8 \end{array}\right. \tag{3}$$

Finalmente resolvemos este sistema escalonado por sustitución hacia atrás obteniendo la solución $(4,3,2)$.

Observación: 1) Podríamos resolver un sistema escalonada aun más sencillo transformando en 1 los coeficientes de la diagonal. Por lo tanto el sistema (3) es equivalente al sistema (4), multiplicando por $\frac{1}{5}$ y por $\frac{1}{4}$ la segunda y tercera ecuación respectivamente del sistema (3)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ & & & & x_3 & = & 2. \end{array}\right. \tag{4}$$

Este sistema es del Ejemplo (5) y la solución es $\{(4,3,2)\}$.

2) En todo el proceso, las ecuaciones y las incógnitas sean mantenido sólo hemos modificado los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes. Por lo tanto las modificaciones podrían hacerse usando exclusivamente los números, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

A este arreglo lo llamaremos *matriz asociada* al sistema, donde las tres primeras columnas representan los coeficientes asociados a las incógnitas y la última los términos independientes, por ello tendremos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Matriz de coeficientes)}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \qquad \text{(Matriz aumentada)}$$

Antes de estudiar un método de matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales daremos la definición de matriz.

Definición 1 *Dados m y n enteros positivos. Llamamos **matriz** de dimensión mxn a una tabla de números reales a_{ij} con m filas (o renglones) y n columnas de la siguiente forma:*

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los números a_{ij} es el elementos de la matriz A_{mxn} correspondiente a la fila i y a la columna j.

*Si $m = n$ decimos que la matriz es **cuadrada** de dimensión n.*

*Si los elementos a_{ij} son 0 para $i < j$, entonces decimos que la matriz es **escalonada**.*

Ahora aplicamos un proceso similar al de Gauss pero trabajando con las matrices. El proceso por el cual eliminamos algunos términos se le suele llamar *hacer ceros* hasta obtener una matriz *escalonada.*

Las operaciones que podemos realizar sobre las filas de una matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales para obtener otra matriz asociada a un sistema equivalente al dado son:

1. Se pueden intercambiar el orden en el cual están escritas dos filas.

2. Una filas se puede multiplicar o dividir por una constante distinta de cero.

3. Un múltiplo de una filas se pude sumar a otra.

Las operaciones indicadas en 1), 2) y 3) son $transformaciones\ elementales$ de las filas de un matriz. Para indicar estas transformaciones usaremos los siguientes símbolos:

Símbolo	significado
$F_i \leftrightarrow F_j$	$Intercambiar$ fila i por j
$kF_i \rightarrow F_i$	$Multiplicar$ la fila i por k
$kF_i + F_j \rightarrow F_j$	$sumar$ k la fila i a la j

Volvamos al ejemplo 3 :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ -\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right) F_1 \leftrightarrow F_2 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_1 + F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{3F_1 + F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{2}{5}F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{4}F_3 \longleftrightarrow F_3]{\frac{1}{5}F_2 \longleftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Con la matriz final regresamos al sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

que es equivalente al sistema original. La solución $(4,3,2)$ se puede encontrar ahora por sustitución hacia atrás.

Ejemplo 7 *Resolver los sistemas b), c) y e) del Ejemplo (1)*

Solución: Resolvemos primero el sistema $e)$

$$e)\left\{\begin{array}{rrcrcrcrcr} - & 2x & + & 3y & + & 4z & & & = & -1 \\ & x & & & - & 2z & + & 2w & = & 1 \\ & & & y & + & z & - & w & = & 0 \\ & 3x & + & y & - & 2z & - & w & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Hemos dispuesto las ecuaciones de modo que aparezcan las mismas variables en columnas vertivales. Comenzamos con la matriz aumentada y luego obtenemos una forma escalonada, usando transformaciones elementales.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3F_1+F_4 \to F_4]{2F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-1F_2+F_4 \to F_4]{-3F_2+F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{-1}{3}F_3 \to F_3]{F_3+F_4 \to F_4} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema asociado a la última matriz es:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & - & 2z & + & 2w & = & 1 \\ & & y & + & z & - & w & = & 0 \\ & & & & z & - & \frac{7}{3}w & = & -\frac{1}{3} \\ & & & & & & w & = & 1 \end{array}\right.$$

Usando sutitución hacia atras obtenemos la solución $(3,-1,2,1)$. Por lo tanto el sistema es compatible determinado y el conjunto solución es: $\{(3,-1,2,1)\}$.

Resolvemos el sistema b)

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+4z=1 \\ 3x+4y+5z=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Comenzamos con la matriz aumentada y luego obtenemos una forma escalonada, usando transformaciones elementales.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{\frac{-3}{2}F_1 + F_2 \to F_2} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2F_2 \to F_2} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & +3y & +4z & = 1 \\ & +y & +2z & = -3 \end{array} \right.$$

El $\left\{ \begin{array}{r} 2x + 3y + 4z = 1 \\ y + 2z = -3 \end{array} \right.$ sistema es equivalente a $\left\{ \begin{array}{r} x = z + 5 \\ y = -2z - 3 \end{array} \right.$

Este sistema es *compatible indeterminado*, tiene un número infinito de soluciones, por lo tanto el conjunto solucion será:

$$\{(x, y, z) \, / x = \lambda + 5 \ \wedge \ y = -2\lambda - 3 \ \wedge \ z = \lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Observación: Cada ecuación del sistema b) es la ecuación de un plano, cuyos vectores normales son $\overrightarrow{n} = (2, 3, 4)$ y $\overrightarrow{n'} = (0, 1, 2)$, respectivamente, que podemos observar que son L.I. por lo tanto los planos se cortan en una recta, cuya ecuación es $\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda + 5 \\ y = -2\lambda - 3 \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array} \right.$ la cual es obtenida como solución del sistema.

Resolvamos el sistema c)

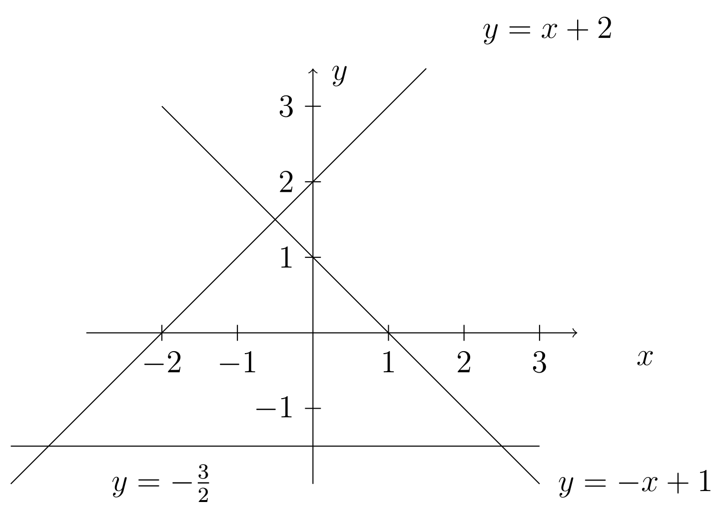
$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ -2x_2 = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2 \to F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ 0 = 2 \end{array} \right.$$

Este sistema es *incompatible* por que se llega a la ecuación $0x_1 + 0x_2 = 2$ la cual es imposible y e conjunto solución es el conjunto vacio.

Observación: En este caso cada ecuación del sistema C) representa un recta del plano, y podemos observar que no se cortan en un punto las tres simultáneamente.

$y = -x + 1, y = x + 2, y = -3/2$



Ejemplo 8 *Resolver los siguientes sistemas homogéneos:*

$$a)\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & 2x & & & + & 3z & - & 2w & = & 0\\ & x & & & - & 2z & + & 2w & = & 0\\ & & & y & + & z & - & w & = & 0\\ & 3x & + & y & - & 2z & - & w & = & 0 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rrrrrrr} x & + & y & & & = & 0\\ x & & & + & z & = & 0\\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Por el Teorema 1 sabemos que estos sistemas siempre son compatibles *a continuación vamos a analizar si son* deteminados *o* indeterminados.

En los sistemas homogéneos solo trabajamos con la matriz de los coeficientes.
Aplicando operaciones elementales a las filas de las matrices obtenemos que el sistema a)

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrr} - & 2x & & & + & 3z & - & 2w & = & 0\\ & x & & & - & 2z & + & 2w & = & 0\\ & & & y & + & z & - & w & = & 0\\ & 3x & + & y & - & 2z & - & w & = & 0 \end{array}\right. \text{ es equivalente a } \left\{\begin{array}{rrrrrrrr} x & & + & 3z & - & 2w & = & 0\\ & y & + & z & - & w & = & 0\\ & & & z & - & \frac{7}{3}w & = & 0\\ & & & & & w & = & 0. \end{array}\right.$$

Usando sutitución hacia atras obtenemos la única solución es $(0,0,0,0)$. Por lo tanto el sistemaes *compatible determinado* y el conjunto solución es: $\{(0,0,0,0)\}$.
El sistema $b)$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} x & + & y & & & = & 0\\ x & & & + & z & = & 0\\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \text{ es equivalente a } \left\{\begin{array}{rrrrrrr} x & + & y & & & = & 0\\ & & y & + & z & = & 0\\ & & & & 0 & = & 0. \end{array}\right.$$

Este sistema es *compatible indeterminado*, tiene un número infinito de soluciones, por lo tanto el conjunto solución será:

$$\{(x,y,z)\,/\; x=-\lambda,\quad y=\lambda,\; z=-\lambda \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}\}.$$

Observación: En este caso cada ecuación del sistema representa un plano que pasa por el origen, y se cortan en una recta que contiene al origen.

6.3.3 Ejemplos de aplicaciones de sistemas

Posiciones relativas de rectas

Ejemplo 9 *Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:*

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=3-5\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=5-\lambda \end{array}\right. \quad \textit{con } \lambda\in\mathbb{R} \qquad \left\{\begin{array}{l} x=1+10\mu\\ y=4-2\mu\\ z=2\mu \end{array}\right. \quad s:\ \textit{con } \mu\in\mathbb{R}\ .$$

Solución: $\overrightarrow{d}=(-5,1,-1)$ es paralelo a $\overrightarrow{d'}=(10,-2,2)$ ya que

$$\overrightarrow{d}\times\overrightarrow{d'}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -5 & 1 & -1\\ 10 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\overrightarrow{0}$$

Ahora determinemos si las rectas son paralelas o coincidentes, para ello resolvamos el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} 3 & - & 5\lambda & = & 1 & + & 10\mu\\ 2 & + & \lambda & = & 4 & - & 2\mu\\ 5 & - & \lambda & = & & & 2\mu \end{array}\right.$$

Ordenando el sistema tenemos

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} - & 5\lambda & - & 10\mu & = & -2 \\ & \lambda & + & 2\mu & = & 2 \\ - & \lambda & - & 2\mu & = & -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -10 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & -10 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ -5 & -10 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 + F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ -5 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} \lambda & + & \mu & = & 2 \\ -5\lambda & - & 10\mu & = & -2 \\ & & 0\mu & = & -5 \end{array}\right.$$

Obtenemos un sistema *Incompatible*; por lo tanto las rectas son *paralelas distintas*.

Ejemplo 10 *Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:*

$$r : \left\{\begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \quad con\ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = 5 \end{array}\right. \quad s :\ con\ \mu \in \mathbb{R}\ .$$

Solución: Los vectores directores $\overrightarrow{d} = (-3, 5, 1)$ y $\overrightarrow{d'} = (-1, 1, 0)$ no son dependientes (verificarlo), por lo tanto las rectas no son paralelas, resolvamos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2 - 3\lambda & = & 1 - \mu \\ 3 + 5\lambda & = & \mu \\ \lambda & = & 5 \end{array}\right.$$

Ordenando el sistema tenemos

$$\left\{\begin{array}{lcr} 3\lambda - \mu & = & -1 \\ 5\lambda - \mu & = & -3 \\ \lambda & = & 5 \end{array}\right.$$

Aplicamos el método Gauss y obtenemos que el sistema es *incompatible*, por lo tanto las rectas se cruzan.

Ejemplo 11 *Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:*

$$r : \left\{\begin{array}{l} x = -2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \quad con\ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{array}\right. \quad s :\ con\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Solución: Los vectores directores $\overrightarrow{d} = (-3, 5, 1)$ y $\overrightarrow{d'} = (-1, 2, 0)$ no son dependientes (verificarlo), por lo tanto las rectas no son paralelas, resolvamos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{lcl} -2 - 3\lambda & = & 1 - \mu \\ 3 + 5\lambda & = & 2\mu \\ \lambda & = & 5 \end{array}\right.$$

ordenando el sistema tenemos

$$\left\{\begin{array}{lcr} 3\lambda - \mu & = & 1 \\ 5\lambda - 2\mu & = & -3 \\ \lambda & = & 5 \end{array}\right.$$

Aplicamos el método Gauss y obtenemos que $\lambda = 5$ y $\mu = 14$ (el sistema es *compatible*). El punto de corte se obtiene haciendo $\lambda = 5$ en las ecuaciones de r :

$$\begin{cases} x = -2 - 3.5 = -17 \\ y = 3 + 5.5 = 28 \\ z = 5 \end{cases}$$

Por lo tanto se *cortan* en $(-17, 28, 5)$.

Aplicaciones Químicas Mezcla de ácidos

Ejemplo 12 *Un laboratorio químico tiene tres recipientes de ácido nítrico,* $\boldsymbol{HNO_3}$*. Un recipiente contiene una solución concentrada de* $\boldsymbol{HNO_3}$ *al* 10%*, el segundo tiene* $\boldsymbol{HNO_3}$ *al* 20% *y el tercero* $\boldsymbol{HNO_3}$ *al* 40%*. ¿Cuantos litros de cada recipiente hay que mezclar para obtener 100 litros de una solución cuya concentración sea del* 25% *de* $\boldsymbol{HNO_3}$*?*

Solución

Sea x, y, z el número de litros de las concentraciones de 10, 20 y 40 % de $\boldsymbol{HNO_3}$, respectivamente. Queremos 100 litros en total, y que la concentración de $\boldsymbol{HNO_3}$ de cada solución sume 25% en 100 litros. Así tenemos

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 0.10x + 0.20y + 0.40z = 0.25(100) \end{cases} \tag{5}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas donde cada ecuación representa geométricamente un plano y podemos observar que son planos no paralelos, por lo tanto la solución sera una recta.

La matriz aumentada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0.10 & 0.20 & 0.40 & 25 \end{array}\right) \xrightarrow{-0.10F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0.10 & 0.30 & 15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{10F_2 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 150 \end{array}\right)$$

Tenemos

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ \quad\;\; y + 3z = 150 \end{cases}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones dadas por

$$\begin{cases} x = 2a - 50 \\ y = -3a + 150 \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \\ z = a \end{cases} \tag{6}$$

Pero por las condiciones del problema necesitamos que $x \geq 0$ y $y \geq 0$, reemplazando en las condiciones (6) obtenemos que $20 \leq a \leq 50$. Así por las condiciones del problema las posibles soluciones son los puntos del segmento de recta dado por:

$$\begin{cases} x = 2a - 50 \\ y = -3a + 150 \quad \text{con } 25 \leq a \leq 50 \\ z = a \end{cases}$$