Práctico Nº 7: Sistemas de Ecuaciones Lineales y Método de Eliminación de Gauss

En los siguientes ejercicios, al resolver un sistema de ecuaciones, utilice el <u>método de eliminación de Gauss</u> y escriba el conjunto de solución en <u>notación de conjuntos</u>.

1) Dado el sistema: $\begin{cases} x + \quad z = 4 \\ x + y \quad = 3 \\ \quad y + z = 5 \end{cases}$

i) Resolver e interpretar geométricamente el sistema y su conjunto solución.
ii) En cada uno de los siguientes casos, realizar la sustitución propuesta obteniendo un nuevo sistema de ecuaciones. Resuelva el nuevo sistema y determine si es equivalente al sistema original:

- **a)** Sustituir dos ecuaciones por la suma de ambas.
- **b)** Sustituir una ecuación por el resultado de multiplicarla por 3.
- **c)** Sustituir una de las ecuaciones por el resultado de sumarla con otra.
- **d)** Sustituir una de las ecuaciones por el resultado de restarle otra.
- **e)** Sustituir una ecuación por la suma de las otras dos.

2) Resolver e interpretar geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad y - z = -1 \\ \quad z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad y - z = 1 \\ x + 2y \quad = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad y - z = 1 \\ x + 2y \quad = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ -x - 2y - 3z = -2 \end{cases}$

3) i) Resolver cada sistema utilizando el método de Gauss y clasificarlo. En caso de que el sistema tenga infinitas soluciones, descríbalas paramétricamente.

a) $\begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + \ z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + \ y - \ z = 1 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x \quad = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x - 3y + 7z - 7w = 11 \\ x + \ y \quad = 1 \\ \quad y - \ z \quad = 1 \\ \quad y + \ z + \ w = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y - z = -4 \\ x + y + z = \ 6 \\ 3x + y + z = \ 8 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 4x - y + \ z = 4 \\ x - y + 4z = 1 \\ 2x + y - 7z = 3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x \quad + \ z = 1 \\ 4x - y - 5z = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x \quad + z = 4 \\ -x + 2y + z = \ 6 \\ \quad y + z = -3 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x - \ y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 2z = \ 0 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} x + 2y + \ z = 3 \\ 3x + 8y - 7z = -1 \\ x + 3y - 4z = -3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \\ 2x - y + z = 3 \\ -4x + 2y - 2z = -6 \end{cases}$ **k)** $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ -6x + 2y - 10z + 3t = -2 \\ 9x - 3y + 2z + 2t = 3 \\ 6x - 2y + 6z - t = 2 \end{cases}$

ii) En los casos en que sea posible, interpretar geométricamente el sistema y su conjunto solución.

4) Para cada par de planos, determinar su posición relativa resolviendo el sistema. Si se cortan en una recta o son coincidentes, obtener una ecuación vectorial para su intersección.

a) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ 5x + 4y - z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 6 \\ -x - 2y + z = -3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x + 2y - z = 1 \\ -5x + 6z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 10x + 5y - 15z = -5 \\ 2x + y - 3z = 5 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} -x + 9y - z = -3 \\ z = 4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -3x + 6y - 3z = 0 \end{cases}$

5) Para cada uno de los sistemas:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

a) Resolver e interpretar geométricamente el primero en $\boldsymbol{R}^2$ y el segundo en $\boldsymbol{R}^3$.

b) Añadir una tercera ecuación de modo que, si es posible, el sistema resulte:

i) Compatible Determinado **ii)** Compatible Indeterminado **iii)** Incompatible

c) Analice: ¿Qué lugar geométrico representa la solución del sistema original?
¿Qué se hizo geométricamente al agregar cada una de las tres nuevas ecuaciones en **b)**?

6) Determinar, usando eliminación gaussiana, <u>todos</u> los valores de la constante C que hacen que el sistema resultante sea:

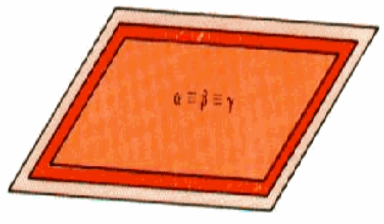
i) Compatible Determinado **ii)** Compatible Indeterminado **iii)** Incompatible

a) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ -3x + Cy - 3z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ 3x + z = 0 \\ 5x + 4y + Cz = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y = 1 \\ Cx + 3y + z = 9 \\ -x - 4z = 3 \end{cases}$

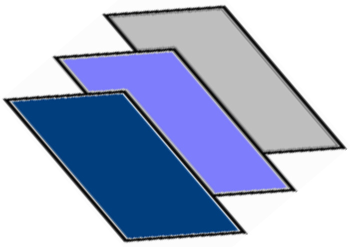
7) Para cada sistema de los ejercicios **2** y **3-j** determinar si la intersección de los tres planos es vacía, un punto, una recta o un plano. Posteriormente, identificar planos paralelos.

8) Plantear un sistema de ecuaciones de 3x3 cuyos planos asociados se ubiquen como en el gráfico.

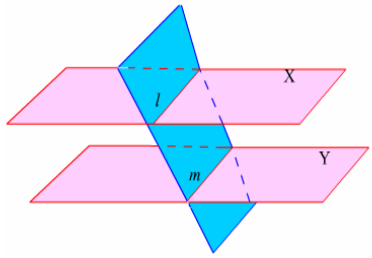
A



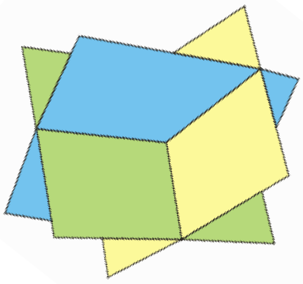
B



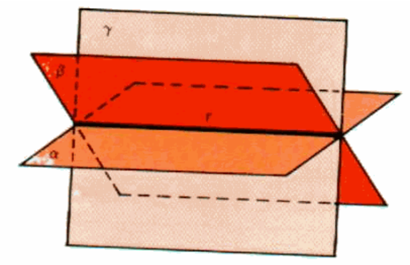
C



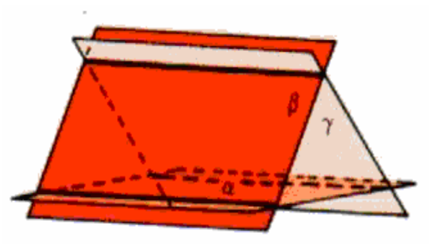
D



E



F



9) Para cada uno de los siguientes conjuntos de vectores de $\boldsymbol{R}^3$:

$A = \{(0,3,0),\ (0,0,-1),\ (2,2,1)\}$ $\qquad B = \{(0,3,0),\ (0,0,-1),\ (2,2,1), (1,2,3)\}$

$C = \{(1,0,3),\ (0,-2,2),\ (-1,-4,1)\}$ $\qquad D = \{(1,-1,2),\ (3,-5,8),\ (1,3,-2)\}$

$E = \{(3,6,1),\ (4,-6,1),\ (-1,2,2)\}$

a) Analizar si es linealmente independiente, usando la definición dada en el práctico de *Vectores*.

b) Si el conjunto es linealmente dependiente, exprese alguno de sus vectores como combinación lineal de los demás.

c) Determinar qué condición debe satisfacer un vector $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ para ser combinación lineal de los vectores dados. (***Sugerencia***: plantear un sistema de ecuaciones conveniente con términos independientes *x*, *y* y *z* y analizar qué restricción deben cumplir estas variables para que dicho sistema sea compatible).

d) Interpretar geométricamente la parte **c)** en función de los conjuntos generados por los vectores dados.