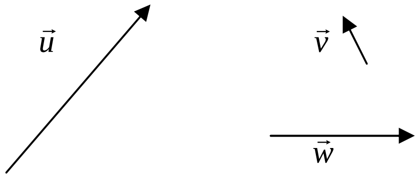
Práctico Nº 5: Vectores

1) Obtener las siguientes combinaciones lineales de los vectores dados mediante métodos gráficos como dilataciones, contracciones, regla del paralelogramo y el método de la poligonal.



a) $3\vec{v}$ **d)** $\vec{v}+\vec{w}$ **g)** $2\vec{w}-3\vec{v}$

b) $\frac{2}{3}\vec{u}$ **e)** $\vec{u}-\vec{v}$ **h)** $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

c) $-2\vec{w}$ **f)** $\vec{v}-\vec{u}$ **i)** $\vec{u}-\frac{5}{2}\vec{v}+3\vec{w}$

2) Dados los vectores $\vec{u}=(4,3)$ y $\vec{v}=(2,-4)$ de $\mathbf{R}^2$**,** obtener geométrica y analíticamente:

a) $\vec{u}+\vec{v}$ **b)** $\vec{u}-\vec{v}$ **c)** $-5\vec{u}$ **d)** $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$ **e)** $2\vec{u}-\frac{3}{2}\vec{v}$

3) i) En caso de que sea posible, obtener gráfica y analíticamente $\vec{u}=(-7,5)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dados:

a) $\vec{a}=(3,-1)$ y $\vec{b}=(-1,3)$ **b)** $\vec{a}=(-1,2)$ y $\vec{b}=(2,-4)$

ii) Expresar $\vec{v}=(-6,3,1)$ como combinación lineal de $(3,-1,2)$, $(0,1,2)$ y $(0,0,-1)$.

4) Graficar y expresar el vector $\vec{u}$ en la forma trigonométrica $\vec{u}=|\vec{u}|\cos\theta\ \vec{i}+|\vec{u}|sen\theta\ \vec{j}$,

donde $0\le\theta<2\pi$ es el ángulo barrido desde el semieje positivo de abscisas :

a) $\vec{u}=(1,3)$ **b)** $\vec{u}=(-3,-4)$ **c)** $\vec{u}=(2,-6)$

5) Una lancha intenta desplazarse a 15*km/h* hacia el nordeste, formando un ángulo de 20º con el ecuador. Sin embargo, se encuentra bajo la acción de una corriente que se desplaza a 5*km/h* en dirección sur.

a) Representar gráficamente las velocidades dadas y la velocidad real de la lancha.

b) Obtener las coordenadas del vector de velocidad real.

c) ¿A qué distancia desde el punto de partida se encuentra la lancha después de una hora?

6) Dados los puntos *P*(4,8,1) y *Q*(3,0,-4) de $\mathbf{R}^3$:

a) Representar los puntos *P* y *Q* y los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ en un mismo sistema de ejes coordenados.

b) Obtener las componentes de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$. Representarlos gráficamente.

c) Calcular la distancia entre *P* y *Q*.

d) Dar las coordenadas del punto medio del segmento $\overrightarrow{PQ}$ y señalarlo en el primer gráfico.

e) Determinar un punto cuya distancia a P sea la mitad de su distancia a Q.

f) Obtener dos vectores paralelos a $\overrightarrow{OP}$ de módulo 2.

g) Calcular el ángulo entre $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ utilizando producto escalar.

7) Calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sabiendo que:

a) $\vec{u} = (5,1)$ y $\vec{v} = (-8,3)$.

b) $\vec{u} = \vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ y $\vec{v} = 2\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + 7\vec{k}$.

c) $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 4$, y el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\frac{\pi}{6}$.

d) $\vec{u} = -4\vec{v}$ y $|\vec{u}| = 3$.

8) Un vagón es remolcado una distancia de 100 m a lo largo de un camino horizontal, con una fuerza constante de 50N. La manija del vagón está a un ángulo de 30º con la horizontal ¿Qué cantidad de trabajo W se llevó acabo? (El trabajo está dado por el producto escalar $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$, donde $\vec{d}$ es el vector del desplazamiento horizontal y $\vec{F}$ es la fuerza aplicada)

9) Dado el vector $v = (3,-4)$:

a) Obtener una ecuación que satisfagan todos los vectores (x, y) ortogonales a $\vec{v}$. Interpretar gráficamente.

b) Obtener todos los vectores ortogonales a $\vec{v}$ de módulo 2.

10) Determine y de modo que los vectores $(-1,4,2)$ y $(3, y, -6)$ sean: **a)** paralelos. **b)** ortogonales.

11) Todo vector no nulo $\vec{u}$ determina una dirección. En $\mathbf{R}^3$ existen infinitas direcciones ortogonales a ésta. Dado el vector $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\,\vec{j} + \vec{k}$:

a) ¿Qué ecuación satisfacen las coordenadas de todo vector ortogonal a $\vec{u}$?

b) Obtener cuatro vectores no nulos ortogonales a $\vec{u}$, todos ellos en distintas direcciones.

12) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbf{R}^2$ de igual módulo. Demostrar las siguientes afirmaciones utilizando propiedades del producto escalar. Verificar gráficamente:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son ortogonales.

b) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, entonces el ángulo que $\vec{u} + \vec{v}$ forma con cada uno de ellos es de 45º.

13) Utilizando los vectores del ejercicio **1**, obtener gráficamente las siguientes proyecciones:

a) $proy_{\vec{u}}\,\vec{w}$ **b)** $proy_{\vec{w}}\,\vec{v}$ **c)** $proy_{\vec{w}}\,\vec{a}$, para un $\vec{a}$ ortogonal a $\vec{w}$.

14) Sea $\vec{v} = (3,1)$. Para cada vector $\vec{u}$ del ejercicio **4** obtener gráfica y analíticamente $proy_{\vec{v}}\,\vec{u}$.

15) En cada caso, calcular $proy_{\vec{b}}\,\vec{a}$. Representar $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $proy_{\vec{b}}\,\vec{a}$ en un mismo gráfico:

a) $\vec{a} = (3,4,5)$ y $\vec{b} = (6,8,0)$ **c)** $\vec{a} = (3,5,1)$ y $\vec{b} = (1,2,-1)$ **e)** $\vec{a} = (-4,2,7)$ y $\vec{b} = (3,-1,2)$
b) $\vec{a} = (6,8,0)$ y $\vec{b} = (3,4,5)$ **d)** $\vec{a} = (3,5,1)$ y $\vec{b} = (-1,-2,1)$

16) Demostrar que para vectores de $\mathbf{R}^n$ $\vec{u}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, vale la igualdad $\left(\vec{u} - proy_{\vec{v}}\vec{u}\right)\cdot \vec{v} = 0$. Interpretar geométricamente y verificar esta interpretación en los gráficos de los ejercicios anteriores.

17) Obtener un vector ortogonal a $(2,4,1)$ y $(1,2,1)$. Represente los tres vectores en un mismo gráfico.

18) **i)** Calcular los productos vectoriales $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{v}\times\vec{u}$ de:

a) $\vec{u} = (3,0,-1)$, $\vec{v} = (0,2,0)$ **b)** $\vec{u} = (3,1,1)$, $\vec{v} = (-1,2,4)$ **c)** $\vec{u} = (-1,-2,5)$, $\vec{v} = (0,3,-2)$

ii) En cada caso, graficar $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u}\times\vec{v}$ en un mismo sistema.

iii) En general, ¿qué es posible afirmar sobre la dirección, el sentido y el módulo de $\vec{u}\times\vec{v}$? Verificar analíticamente para **a)**.

19) Demostrar que $\vec{u}\times\vec{v}$ es ortogonal a todas las combinaciones lineales de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

20) Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores de $\mathbf{R}^3$ tales que $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k}$. Calcular:

a) $4\vec{u}\times 3\vec{v}$ **b)** $\vec{v}\times\left(2\vec{v}+\vec{u}\right)$ **c)** $\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\left(5\vec{u}-\vec{v}\right)$

21) Dados los puntos P y Q del ejercicio **6**, obtener el cuarto vértice del paralelogramo con vértice en el origen de $\mathbf{R}^3$, cuyos lados están dados por los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$. Graficar y calcular su área.

Ejercicios Complementarios:

22) Probar que para todo vector $\vec{u}$ de $\mathbf{R}^3$ y para todo número real λ se cumple $|\lambda\vec{u}| = |\lambda||\vec{u}|$.

23) Demostrar que si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores paralelos no nulos de $\mathbf{R}^n$, entonces para todo vector $\vec{u}$ vale la igualdad, $proy_{\vec{v}}\,\vec{u} = proy_{\vec{w}}\vec{u}$. Esto es, la proyección de $\vec{u}$ depende exclusivamente de la dirección sobre la cual se proyecta (comparar los resultados del ejercicio **15** partes **c** y **d**).

Para los siguientes ejercicios utilizaremos la siguiente definición: ***<u>Independencia Lineal</u>***

Un conjunto de k vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k\}$ *de* $\boldsymbol{R}^n$ *es **linealmente independiente** si y sólo si la implicación*

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{v}_j = \bar{0} \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$$

es verdadera para todo conjunto de escalares $\alpha_1, ..., \alpha_k$. *Es decir que la única forma de expresar el vector nulo como combinación lineal de* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_k$ *es eligiendo todos los escalares* α_j *iguales a 0.*

24) Determinar, resolviendo un sistema de ecuaciones, si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes:

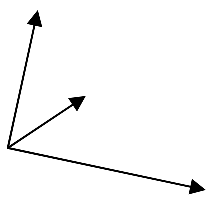
a) $\{(1,2,3), (0,-1,-2), (0,0,3)\}$
b) $\{(1,0,-1), (2,3,4)\}$
c) $\{(1,0,0), (0,-1,2), (0,2,-4)\}$

25) a) Enunciar la definición de conjunto de vectores ***linealmente dependiente***, negando la definición dada.

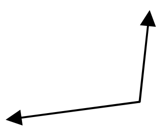
b) Demostrar que un conjunto de dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si alguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

c) Determinar si los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o independientes.

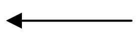
i)



ii)



iii)



iv)